Correction des NOUVEAUX exercices de la fiche de liaison « Systèmes linéaires »

Exercice 1

a) $\begin{cases} 2x-7y=-12 \\ x-2y=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x-7y=-12 \\ x=2y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2(2y)-7y=-12 \\ x=2y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4y-7y=-12 \\ x=2y \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} -3y=-12 \\ x=2y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=\dfrac{-12}{-3} \\ x=2y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=4 \\ x=2y \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=4 \\ x=2\times 4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \boldsymbol{y=4} \\ \boldsymbol{x=8} \end{cases}$

Le couple qui est donc solution de ce système est **(8 ; 4).**

Méthode :

On a choisit l'équation x – 2y = 0 car c'est cette équation qui permettait le plus facilement d'exprimer une inconnue (ici x) en fonction de l'autre (ici y).

En effet, x est multiplié par 1 et comme l'autre membre de l'équation est égal à 0, les calculs sont beaucoup plus faciles.

b) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ 4\times(3y+2)+2y=1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ 12y+8+2y=1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ 14y+8=1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ 14y=1-8 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ 14y=-7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ y=-\dfrac{7}{14} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y+2 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}+2 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \boldsymbol{x=\dfrac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}} \end{cases}$

Le couple qui est donc solution de ce système est $\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{1}{2}}\right)$.

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-b=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{2}a-\dfrac{7}{2}b=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ \dfrac{3}{2}a-\dfrac{7}{2}b=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ \dfrac{3}{2}a-\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}\right)=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ \dfrac{3}{2}a-\dfrac{7}{4}a+\dfrac{21}{4}=4 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ \dfrac{6}{4}a-\dfrac{7}{4}a+\dfrac{21}{4}=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ -\dfrac{1}{4}a+\dfrac{21}{4}=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ -\dfrac{1}{4}a=4-\dfrac{21}{4} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ -\dfrac{1}{4}a=\dfrac{16}{4}-\dfrac{21}{4} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ -\dfrac{1}{4}a=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ a=-\dfrac{5}{4}\times\left(-\dfrac{4}{1}\right) \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}=b \\ a=5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\times 5-\dfrac{3}{2}=b \\ a=5 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} \dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=b \\ a=5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \dfrac{2}{2}=b \\ a=5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \boldsymbol{1=b} \\ \boldsymbol{a=5} \end{cases}$

Le couple qui est donc solution de ce système est **(5 ; 1).**

Exercice 2

Dans toutes les corrections, L1 désignera la « *l'équation du haut* » et L2 désignera « *l'équation du bas* ».

a) $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$ ***on va multiplier cette ligne par – 1*** équivaut à $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ -3x + 7y = -2 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 4x - 7y - 3x + 7y = -2 + 3 \end{cases}$ **on a ajouté la L1 à la L2** équivaut à $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 4x - 3 = 7y \\ x = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 4 \times 1 - 3 = 7y \\ x = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 1 = 7y \\ x = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \mathbf{\frac{1}{7} = y} \\ \mathbf{x = 1} \end{cases}$

Le couple qui est donc solution de ce système est $\mathbf{\left(1\ ;\frac{1}{7}\right)}$.

Remarque : On aurait pu multiplier la L1 par 3 et L2 par – 4, mais les calculs seraient plus compliqués.

b) $\begin{cases} -x + y = 6 \\ -\frac{x}{2} + 3y = 3 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -x + y = 6 \\ -\frac{x}{2} + 3y = 3 \end{cases}$ ***on va multiplier cette ligne par – 2*** équivaut à $\begin{cases} -x + y = 6 \\ x - 6y = -6 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} -x + y = 6 \\ -x + y + x - 6y = 6 - 6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -x + y = 6 \\ -5y = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -x + y = 6 \\ y = \frac{0}{-5} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -x + y = 6 \\ y = 0 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} -6 + y = x \\ y = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -6 + 0 = x \\ y = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \mathbf{-6 = x} \\ \mathbf{y = 0} \end{cases}$

Le couple qui est donc solution de ce système est **(– 6; 0)**.

Remarque : On aurait pu multiplier la L1 par – 3, mais les calculs, là encore, seraient plus compliqués.

c) $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6x + 5y = 2 & \textbf{\textit{on va multiplier cette ligne par 2}} \\ 3x - 2y = 10 & \textbf{\textit{on va multiplier cette ligne par 5}} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 12x + 10y = 4 \\ 15x - 10y = 50 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 12x + 10y = 4 \\ 12x + 10y + 15x - 10y = 4 + 50 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 12x + 10y = 4 \\ 27x = 54 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 12x + 10y = 4 \\ x = \frac{54}{27} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 12x + 10y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x - 10 = 2y \\ x = 2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3 \times 2 - 10 = 2y \\ x = 2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6 - 10 = 2y \\ x = 2 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} -4 = 2y \\ x = 2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \frac{-4}{2} = 2y \\ x = 2 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \mathbf{-2 = y} \\ \mathbf{x = 2} \end{cases}$

Le couple qui est donc solution de ce système est **(2; – 2)**.

Remarque : Une fois que l'on a déterminé une des deux inconnues, on peut choisir n'importe quelle équation pour trouver l'autre inconnue. Voilà pourquoi l'équation 3*x* – 2*y* = 10 a été choisie.

Exercice 3

a) On peut ici, soit utiliser la méthode de substitution avec l'équation $x - 12y = 4$ équivalente à l'équation $x = 12y + 4$.
On peut aussi, utiliser la méthode de la combinaison linéaire en multipliant la 1ère équation par 3.

Ici, c'est celle là qui semble la plus simple car le produit par 3 n'est pas compliqué et que l'on obtient tout de suite une équation avec *y* comme seule inconnue.

$\begin{cases} x - 12y = 4 \\ -3x + 41y = -7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x - 12y = 4 \; \textbf{\textit{On va multiplier par 3}} \\ -3x + 41y = -7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x - 36y = 12 \\ -3x + 41y = -7 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 3x - 36y = 12 \\ 3x - 36y - 3x + 41y = 12 - 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x - 36y = 12 \\ 5y = 5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x - 36y = 12 \\ y = \dfrac{5}{5} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x - 36y = 12 \\ y = 1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 3x - 36 \times 1 = 12 \\ y = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x - 36 = 12 \\ y = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x = 36 + 12 \\ y = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 3x = 48 \\ y = 1 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{48}{3} \\ y = 1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \mathbf{x = 16} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$. Le couple qui est donc solution de ce système est **(16; 1).**

b) Si on utilise la méthode de substitution (l'équation $6a - 5b = 0$ est la plus simple à utiliser grâce au = 0), on aura donc $a = \dfrac{5}{6}b$ ou $b = \dfrac{6}{5}a$ qui n'est pas pratique à cause des réductions aux mêmes dénominateurs), là encore la méthode de combinaison semble plus simple.

$\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ 2a - b = 12 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ 2a - b = 12 \; \textbf{\textit{On va multiplier par – 3}} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ -6a + 3b = -36 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ 6a - 5b - 6a + 3b = 0 - 36 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ -2b = -36 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ b = \dfrac{-36}{-2} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 6a - 5b = 0 \\ b = 18 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6a = 5b \\ b = 18 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6a = 5 \times 18 \\ b = 18 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 6a = 90 \\ b = 18 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = \dfrac{90}{6} \\ b = 18 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \mathbf{a = 15} \\ \mathbf{b = 18} \end{cases}$. Le couple qui est donc solution de ce système est **(15; 18).**

c) ici, c'est la méthode de substitution qui semble la plus simple. En effet, $5u + 20v = 0$ équivaut à $u = -4v$ et la substitution est ensuite aisée.

$\begin{cases} 5u + 20v = 0 \\ 3u - 2v = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 5u = -20v \\ 3u - 2v = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 5u = -20v \\ 3u - 2v = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 5u = \dfrac{-20v}{5} \\ 3u - 2v = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} u = -4v \\ 3u - 2v = 7 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} u = -4v \\ 3\times(-4v) - 2v = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} u = -4v \\ -12v - 2v = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} u = -4v \\ -12v - 2v = 7 \end{cases}$

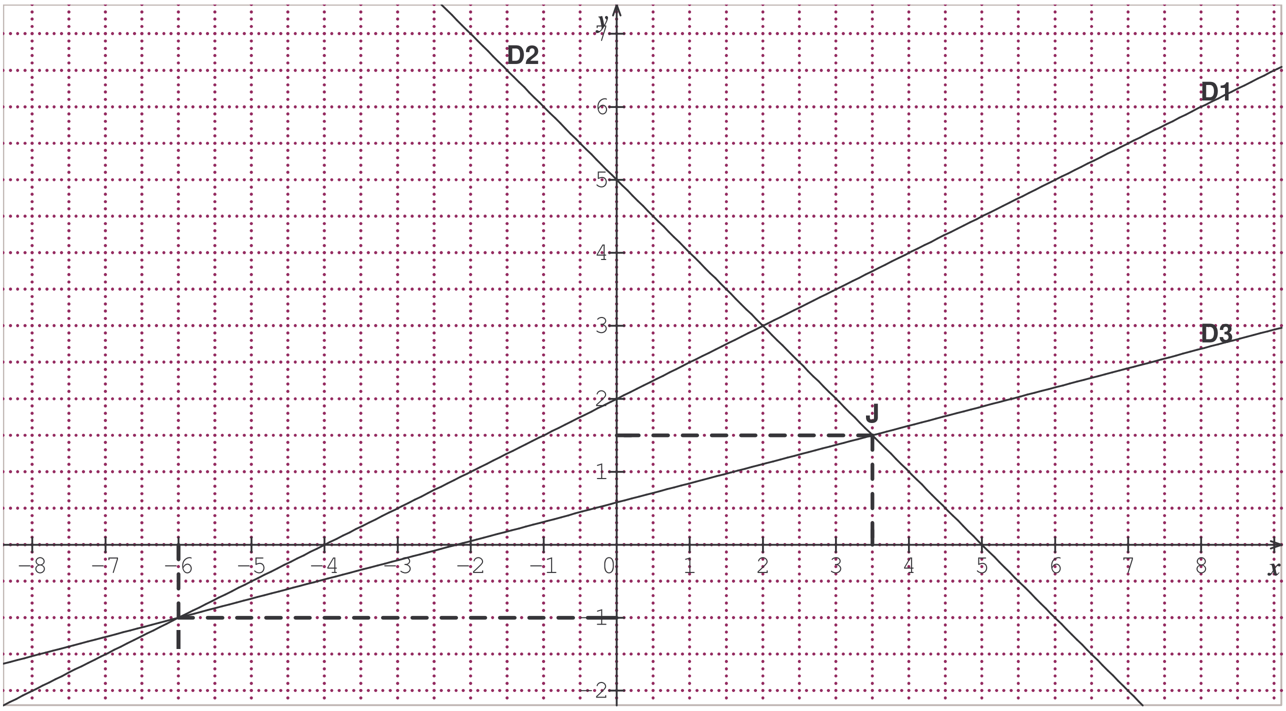
équivaut à $\begin{cases} u = -4v \\ -14v = 7 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} u = -4v \\ v = \dfrac{7}{-14} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} u = -4v \\ v = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} u = -4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ v = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} u = \dfrac{-4}{-2} \\ v = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} \mathbf{u = 2} \\ \mathbf{v = -\dfrac{1}{2}} \end{cases}$. Le couple qui est donc solution de ce système est $\left(\mathbf{2; -\dfrac{1}{2}}\right)$.

Ce qui est bien avec la méthode de la substitution, c'est qu'une fois une inconnue déterminée, l'autre inconnu est très facile à trouver grâce à l'autre équation (ici, $u = -4v$).

Exercice 4

1.



a) Comme la droite (D_1) représente la fonction affine $x \longmapsto \frac{1}{2}x + 2$ et la droite (D_3) représente la fonction affine $x \longmapsto \frac{5}{19}x + \frac{11}{19}$,

le couple solution du système $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{5}{19}x + \frac{11}{19} \end{cases}$ est **le point de concours** des droites (D_1) et (D_3).

C'est donc I, le point de coordonnées (– 6 ; – 1). D'où $x = -6$ et $y = -1$. Le couple qui est donc solution de ce système est **(– 6; – 1).**

b) L'équation $-5x + 19y = 11$ ne correspond pour l'instant à aucune fonction affine.

Il faut « transformer » cette équation en une équation équivalente de la forme $y = \ldots$

$-5x + 19y = 11$ équivaut à $19y = 5x + 11$ équivaut à $y = \frac{5x}{19} + \frac{11}{19}$ équivaut à $y = \frac{5}{19}x + \frac{11}{19}$.

Comme la droite (D_2) représente la fonction affine $x \longmapsto -x + 5$ et la droite (D_3) représente la fonction affine $x \longmapsto \frac{5}{19}x + \frac{11}{19}$,

le couple solution du système $\begin{cases} x + y = 5 \\ -5x + 19y = 11 \end{cases}$ est **le point de concours** des droites (D_2) et (D_3).

C'est donc J, le point de coordonnées (3,5; 1,5). D'où $x = 3{,}5$ et $y = 1{,}5$. Le couple qui est donc solution de ce système est **(3,5; 1,5).**

2.
Méthode, on trace les droites qui représentent respectivement les fonctions affines $x \longmapsto 0{,}5\,x - 2$ et $x \longmapsto -x + 1$.

Le couple solution de ce système est le couple de coordonnées du point de concours des deux droites que l'on a tracées précédemment.

Traçons le droite $\mathscr{D}$ qui représente la fonction affine $x \longmapsto 0{,}5\,x - 2$.

Si $x = 0$, alors $0{,}5\times0 - 2 = -2$. Le point de coordonnées (0 ; – 2) appartient à $\mathscr{D}$.

Si $x = 2$, alors $0{,}5\times2 - 2 = 1 - 2 = -1$. Le point de coordonnées (2 ; – 1) appartient à $\mathscr{D}$.

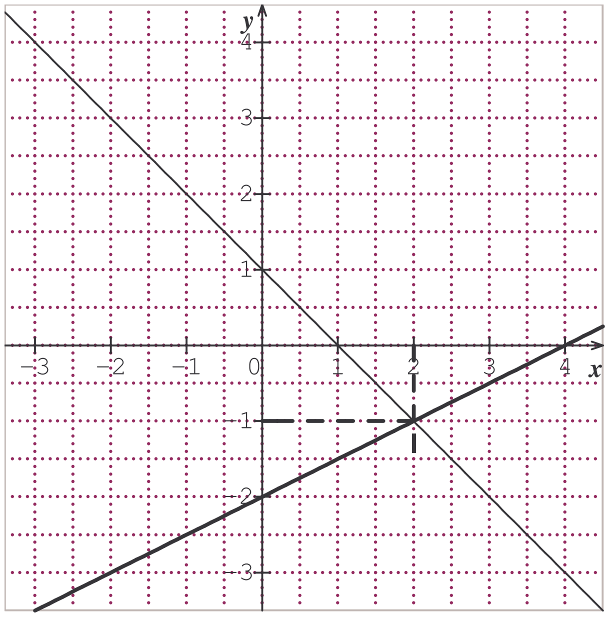
On peut maintenant tracer $\mathscr{D}$.

Traçons le droite $\mathscr{D}$ 'qui représente la fonction affine $x \longmapsto -x+1$.

Si $x = 0$, alors $-0+1=1$. Le point de coordonnées (0 ; 1) appartient à $\mathscr{D}$ **'**.

Si $x = 1$, alors $-1+1=0$. Le point de coordonnées (1 ; 0) appartient à $\mathscr{D}$'.

On peut maintenant tracer $\mathscr{D}$ '.



Comme $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ ' se coupent au point I de coordonnées (2 ; – 1),

le couple solution du système $\begin{cases} y = 0{,}5\,x - 2 \\ y = -x+1 \end{cases}$ est **(2 ; – 1)**.

Exercice 5

Méthode :

* On note x et y les nombres recherchés. Ici, comme on recherche le nombre de CD possédé par chacun des adolescents, on peut noter x le nombre de CD possédé par Antoine et y, le nombre de CD possédé par Bérénice.

On a donc ***x* = le nombre de CD possédé par Antoine** et ***y* = le nombre de CD possédé par Bérénice**.

* * On va trouver au moins deux équations qui font intervenir les deux inconnues. Il suffit de traduire les indices de l'énoncé.

Antoine : « Si je doublais mon nombre de CD, j'en aurais 7 de plus que toi. »

« Si je doublais mon nombre de CD (…) » : comme c'est Antoine qui parle, on a donc $2x$.
« (…), j'en aurais 7 de plus que toi. » : désigne $y + 7$.

On a donc $\mathbf{2x = y + 7}$ qui peut également s'écrire $\mathbf{2x - y = 7}$.

Bérénice : « Si nous achetions encore deux chacun, nous en aurions 24 au total. »

« Si nous achetions encore deux chacun, (…) » : on doit donc ajouter 2 à x et à y soit $x + 2$ et $y + 2$.
« (…), nous en aurions 24 au total. » : le total de $x + 2$ et $y + 2$ doit donc donner 24 d'où soit $\mathbf{x + 2 + y + 2 = 24}$ soit $\mathbf{x + y = 20}$.

* * * Les valeurs recherchées forment donc le couple solution du système $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + y = 20 \end{cases}$.

Ici la méthode la plus appropriée est la combinaison linéaire car on a déjà $-y$ et $+y$.

On éliminera donc très facilement l'inconnue y.

$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + y = 20 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 2x - y + x + y = 7 + 20 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x = 27 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x = \dfrac{27}{3} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x = 9 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 2 \times 9 - y = 7 \\ x = 9 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 18 - y = 7 \\ x = 9 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -y = 7 - 18 \\ x = 9 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -y = -11 \\ x = 9 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} y = 11 \\ x = 9 \end{cases}$.

Antoine a donc 9 CD et Bérénice a 11 CD.